SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1994-95

Maria Manfredini

IL PROBLEMA DI DIRICHLET PER UNA CLASSE DI OPERATORI ULTRA PARABOLICI

9 febbraio 1995

Tecnoprint - Bologna 1995

Riassunto. In questa nota presentiamo alcuni risultati di esistenza e unicitá riguardanti il problema di Dirichlet, su sottoinsiemi aperti e limitati di R^{N+1}, per gli operatori del tipo

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x,t)\partial^2_{x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij} x_i \partial_{x_j} - \partial_t,$$

$$(x,t) \in R^{N+1},\ 1 \leq q \leq N,\ b_{ij} \in R,\ i,j = 1,\dots N$$

dove la matrice $(a_{ij}(z))_{i,j=1,\dots,q}$ è simmetrica e *uniformemente* definita positiva in R^q. I coefficienti a_{ij} sono limitati e appartengono a uno spazio di funzioni di tipo hölderiane modellato sulla struttura di spazio omogeneo associato all'-operatore L.

Inoltre proviamo un criterio geometrico per la regolarità dei punti di frontiera che estende al nostro contesto il classico criterio del cono esterno di Zaremba.

Abstract. In this note we show some results about the esistence of solution of the Dirichlet problem, on bounded open subset of R^{N+1}, for the operators of the following type:

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x,t)\partial^2_{x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij} x_i \partial_{x_j} - \partial_t,$$

$$(x,t) \in R^{N+1},\ 1 \leq q \leq N,\ b_{ij} \in R,\ i,j = 1,\dots N$$

where the matrix $(a_{ij}(z))_{i,j=1,\dots,q}$ is simmetric and *uniformly* positive in R^q. The coefficients a_{ij} are bounded and belong to a space of hölderian functions modelled on a structure of homogeneous space naturally associated to L.

Moreover, we prove a geometric criterion for the regularity of the boundary points, which extends to our case the classical Zaremba criterion of exterior cone.

Section 7 contains a more detailed summary of this work.

§1. Introduzione.

In questa nota presentiamo alcuni risultati riguardanti il primo problema dei valori al contorno per gli operatori differenziali:

$$L = \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(z)\partial^2_{x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij} x_i \partial_{x_j} - \partial_t, \tag{1.1}$$

ove $z = (x,t) \in R^{N+1}$, $1 \leq q \leq N$ e $b_{ij} \in R$ per ogni $i,j = 1,\dots,N$. I coefficienti a_{ij} sono limitati e hölderiani per ogni $i,j = 1,\dots,q$ e la matrice $(a_{ij}(z))_{i,j=1,\dots,q}$ è simmetrica e *uniformemente* definita positiva in R^q.

Dapprima consideriamo il problema

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in} \quad \Omega \\ u = \phi & \text{su} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1.2}$$

per una classe di aperti fortemente regolari, stabilendo un risultato di esistenza e di unicità delle soluzioni in senso classico. A tal fine abbiamo provato delle stime di tipo Schauder in spazi hölderiani modellati su una struttura omogenea di R^{N+1} legata all'operatore L.

Successivamente, per aperti qualunque, dimostriamo l'esistenza di una soluzione generalizzata nel senso di Perron-Wiener del problema (1.2) che assume il dato al bordo nei punti regolari per L del $\partial\Omega$.

Infine, forniamo un criterio di regolarità dei punti di frontiera che estende a questo contesto il classico criterio del cono esterno di Zaremba.

§2. Preliminari.

In R^{N+1} consideriamo l'operatore differenziale:

$$L = \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(z)\partial^2_{x_i x_j} + \langle x, BD\rangle - \partial_t, \quad D = (\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_N}), \tag{2.1}$$

dove $z = (x,t) \in R^{N+1}$, $1 \leq q \leq N$ e $\langle\,,\rangle$ indica il prodotto interno in R^N.

Sui coefficienti di L faremo le seguenti ipotesi:

H$_1$) $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(R^{N+1})$ per $i,j = 1,\dots,q$ ed esiste $c > 0$ tale che

$$\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{q}\xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(z)\xi_i\xi_j \leq c\sum_{i=1}^{q}\xi_i^2$$

per ogni $z \in R^{N+1}$ e per ogni $(\xi_1,\dots,\xi_q) \in R^q$.

H$_2$) B è una matrice costante $N \times N$ avente la forma seguente:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

dove per ogni $i = 1, \dots, r$, B_i è una matrice $p_{i-1} \times p_i$ con rango p_i, $q = p_0 \geq p_1 \geq \dots \geq p_r$ e $p_0 + p_1 + \dots + p_r = N$.

Fissato $z_0 \in R^{N+1}$, indichiamo con L_{z_0} il *congelato* di L in z_0

$$L_{z_0} = \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(z_0)\partial^2_{x_i,x_j} + \langle x, BD\rangle - \partial_t.$$

Osservazione 2.1. (Cfr. [LP]).

1) Esiste un gruppo di traslazioni $(R^{N+1}, \circ)$ rispetto al quale l'operatore L_{z_0} è invariante per traslazioni a sinistra;

2) Esiste un gruppo di dilatazioni su R^{N+1}, che indicheremo con $(D(\lambda))_{\lambda>0}$, rispetto al quale L_{z_0} è omogeneo di grado 2, cioè:

$$L_{z_0} \circ D(\lambda) = \lambda^2 D(\lambda) \circ L_{z_0}, \quad \forall \lambda > 0.$$

La dilatazione $D(\lambda)$ è la seguente

$$D(\lambda) = \mathrm{diag}(\lambda I_{p_0}, \lambda^3 I_{p_1}, \lambda^5 I_{p_2}, \dots, \lambda^{2r+1} I_{p_r}, \lambda^2)$$

dove I_k è la matrice identità $k \times k$. Indichiamo con $Q+2$ la *dimensione omogenea* di R^{N+1} rispetto a $(D(\lambda))_{\lambda>0}$

$$Q + 2 = p_0 + 3p_1 + 5p_2 + \cdots (2r+1)p_r + 2.$$

Introduciamo ora una *norma* in R^{N+1} omogenea di grado 1 rispetto al gruppo di dilatazioni $(D(\lambda))_{\lambda>0}$ (Cfr. [FR]).

Definizione 2.2. *Se $z \in R^{N+1} \setminus \{0\}$ poniamo $||z|| = \rho$, ρ è l'unica soluzione positiva dell'equazione*

$$\frac{x_1^2}{\rho^{2\alpha_1}} + \frac{x_2^2}{\rho^{2\alpha_2}} + \cdots + \frac{x_N^2}{\rho^{2\alpha_N}} + \frac{t^2}{\rho^4} = 1,$$

dove $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{p_0} = 1$, $\alpha_{p_0+1} = \cdots = \alpha_{p_0+p_1} = 3$, $\dots$, $\alpha_{p_0+\cdots+p_{r-1}+1} = \cdots = \alpha_N = 2r+1$.

Proposizione 2.3. *L'applicazione $z \mapsto ||z||$ ha le seguenti proprietà*

N_1) $||D(\lambda)z|| = \lambda||z||$ *per ogni* $z \in R^{N+1}$ *e per ogni* $\lambda > 0$.

N_2) *Esiste una costante* $c = c(B) > 0$ *tale che per ogni* $z, \zeta \in R^{N+1}$ *si ha*

$$||z + \zeta|| \leq c(||z|| + ||\zeta||) \quad e \quad ||z \circ \zeta|| \leq c(||z|| + ||\zeta||)$$

e

$$\frac{1}{c}||z|| \leq ||z^{-1}|| \leq c||z||.$$

N_3) *Esiste una costante* $c = c(B) > 0$ *tale che*

$$|z - \zeta| \leq ||\zeta^{-1} \circ z||, \quad ||\zeta^{-1} \circ z|| \leq 1,$$

dove $|\ |$ *indica la norma euclidea in* R^{N+1}.

Introduciamo una quasidistanza in R^{N+1} relativa alla *norma* $||\ ||$:

Definizione 2.4. *Per ogni $z, \zeta \in R^{N+1}$ poniamo*

$$d(z,\zeta) = ||\zeta^{-1} \circ z||.$$

d è una quasidistanza (Cfr. [S]), nel senso che

$$d(z,\zeta) \geq 0, \quad d(z,\zeta) = 0 \quad \text{se e solo se } z = \zeta,$$

ed esiste $c > 0$ tale che

$$d(z,\zeta) \leq c\,(d(z,z') + d(z',\zeta)) \quad \forall z, z', \zeta \in R^{N+1}.$$

Denoteremo con $B(z,r)$ l'insieme

$$B(z,r) = \{\zeta \in R^{N+1} \,/\, d(z,\zeta) \leq r\}.$$

Osservazione 2.5. La misura di Lebesgue μ in R^{N+1} è invariante per le traslazioni del gruppo $(R^{N+1}, \circ)$. In particolare $\mu(B(z,r)) = \mu(B(0,r)) = r^{Q+2}\,\mu(B(0,1))$, per ogni $z \in R^{N+1}$ e per ogni $r > 0$. (R^{N+1}, d, μ) è uno spazio di natura omegenea nel senso di Coifman e Weiss in quanto

$$\mu(B_d(z,2r)) = 2^{Q+2}\mu(B_d(z,r)), \quad \forall\, z \in R^{N+1} \quad \forall r > 0.$$

Fissiamo $z_0 \in R^{N+1}$ e indichiamo con L_{z_0} l'operatore congelato in z_0, denotiamo con $\Gamma(z_0;\cdot)$ la sua soluzione fondamentale con polo in zero.

Proposizione 2.6. *Sia $z_0 \in R^{N+1}$ e $\Gamma^0(\cdot) = \Gamma(z_0;\cdot)$. Allora*

G_1) $\Gamma^0 \in C^\infty(R^{N+1} \setminus \{0\})$.

G_2) Γ^0 è $D(\lambda)$-omogenea di grado $-Q$ e $\Gamma^0_{ij} = \partial^2_{x_i x_j}\Gamma^0$ è $D(\lambda)$-omogenea di grado $-Q-2$ per $i,j = 1,\dots,q$.

G_3) (Proprietà di media nulla). Per ogni a, b con $0 < a < b$ si ha

$$\int_{a \leq ||z|| \leq b} \Gamma^0_{ij}(\zeta)d\zeta = 0 \quad \forall i,j = 1,\dots,q.$$

G_4) (Disuguaglianza di Hörmander puntuale). Per ogni $i,j = 1,\dots,q$ esistono due costanti $c > 0$ ed $M > 0$ tali che

$$|\Gamma^0_{ij}(\eta^{-1} \circ \zeta) - \Gamma^0_{ij}(\eta^{-1} \circ z)| \leq c\,\frac{||\zeta^{-1} \circ z||^\beta}{||z^{-1} \circ \eta||^{Q+2+\beta}}$$

se $||z^{-1} \circ \eta|| \geq M\,||\zeta^{-1} \circ z||$. La costante β è definita da

$$\beta = \frac{2}{2r+1}, \tag{2.2}$$

ove ricordiamo che r è il numero dei blocchi non nulli della matrice B.

Osservazione 2.7. La disuguaglianza di Hörmander puntuale garantisce la classica condizione di Hörmander integrale, cioè: esistono $A > 1$ e $c > 0$ tali che per ogni z, $\zeta \in R^{N+1}$ si ha

$$\int_{d(\eta,z) \geq A\, d(z,\zeta)} |\Gamma^0_{ij}(\eta^{-1} \circ \zeta) - \Gamma^0_{ij}(\eta^{-1} \circ z)|d\eta \leq c.$$

§3. Spazi B-hölderiani e stime di tipo Schauder.

Introduciamo alcuni spazi funzionali legati all'operatore L definito in (2.1) e più precisamente alla struttura omogenea introdotta nel paragrafo precedente.

Definizione 3.1. *Siano $0 < \alpha \leq 1$ ed Ω un sottoinsieme aperto di R^{N+1}. Diremo che $f : \Omega \subseteq R^{N+1} \to R$ è B-hölderiana di esponente α in Ω, e scriveremo $f \in C^{\alpha}(\Omega; B)$, se esiste una costante positiva k tale che*

$$|f(z) - f(\zeta)| \leq k\, ||\zeta^{-1} \circ z||^{\alpha} \quad \forall z, \zeta \in \Omega.$$

Denoteremo poi con $|\cdot|_{\alpha,\Omega;B}$ o più semplicemente con $|\cdot|_{\alpha,\Omega}$, la norma

$$|f|_{\alpha,\Omega;B} = \sup_{\Omega} |f| + \sup_{z,\zeta\in\Omega} \frac{|f(z) - f(\zeta)|}{||\zeta^{-1} \circ z||^{\alpha}}.$$

Osservazione 3.2. Se f è una funzione limitata e α-hölderiana nel senso classico su un aperto limitato Ω allora f è B-hölderiana di esponente α. Viceversa, se $f \in C^{\alpha}(\Omega; B)$ allora f è $\alpha\beta$- hölderiana nel senso classico in Ω, dove β è la costante positiva definita in (2.2).

Definizione 3.3 (Funzioni internamente B-hölderiane). *Siano $0 < \alpha \leq 1$ ed Ω un sottoinsieme aperto di R^{N+1}. Diremo che una funzione limitata $f : \Omega \to R$ appartiene allo spazio $C_d^{\alpha}(\Omega; B)$ se*

$$\sup_{z,\bar{z}\in\Omega} d_{z,\bar{z}}^{\alpha} \frac{|f(z) - f(\bar{z})|}{||\bar{z}^{-1} \circ z||^{\alpha}} < \infty,$$

dove

$$d_{z,\bar{z}} = \min\{d_z, d_{\bar{z}}\}, \quad d_z = \inf_{\zeta\in\partial\Omega} ||\zeta^{-1} \circ z||.$$

Definiamo

$$|f|_{\alpha,d;\Omega} = \sup_{\Omega} |f| + \sup_{z,\bar{z}\in\Omega} d_{z,\bar{z}}^{\alpha} \frac{|f(z) - f(\bar{z})|}{||\bar{z}^{-1} \circ z||^{\alpha}}.$$

Diremo inoltre che $f \in C_d^{2+\alpha}(\Omega; B)$ se

$$\begin{aligned}
|f|_{2+\alpha,d;\Omega} =& \sup_{\Omega} |f| + \sum_{i=1}^{q} \sup_{z\in\Omega} d_z |f_i(z)| + \sum_{i,j=1}^{q} \sup_{z\in\Omega} d_z^2 |f_{ij}(z)| \\
&+ \sum_{i,j=1}^{q} \sup_{z,\bar{z}\in\Omega} d_{z,\bar{z}}^{2+\alpha} \frac{|f_{ij}(z) - f_{ij}(\bar{z})|}{||\bar{z}^{-1} \circ z||^{\alpha}} \\
&+ \sup_{\Omega} d_z^2 |Yf(z)| + \sup_{z,\bar{z}\in\Omega} d_{z,\bar{z}}^{2+\alpha} \frac{|Yf(z) - Yf(\bar{z})|}{||\bar{z}^{-1} \circ z||^{\alpha}} \\
\equiv& \sup_{\Omega} |f| + \sum_{i=1}^{q} \sup_{\Omega} d|f_i| + \sum_{i,j=1}^{q} |d^2 f_{ij}|_{\alpha,d;\Omega} + |d^2 Yf|_{\alpha,d;\Omega} < +\infty.
\end{aligned}$$

Abbiamo usato la notazione $f_i = \partial_{x_i} f$, $f_{ij} = \partial^2_{x_i x_j} f$ e $Y = \langle x, BD\rangle - \partial_t$.

In modo standard si dimostra che gli spazi $(C^{\alpha}(\Omega; B), |\cdot|_{\alpha;\Omega})$, $(C^{2+\alpha}(\Omega; B), |\cdot|_{2+\alpha;\Omega})$, $(C_d^{\alpha}(\Omega; B), |\cdot|_{\alpha,d;\Omega})$ e $(C_d^{2+\alpha}(\Omega; B), |\cdot|_{2+\alpha,d;\Omega})$ sono completi.

Sussiste il seguente risultato:

Teorema 3.4. *Supponiamo che L verifichi le ipotesi H_1-H_2 e che i coefficienti $a_{ij} \in C_d^\alpha(\Omega; B)$ per $i, j = 1, \dots q$. Sia $f \in C_d^\alpha(\Omega; B)$ con $0 < \alpha < \beta$, β definito in (2.2). Se $u \in C_d^{2+\alpha}(\Omega; B)$ e $Lu = f$ allora esiste una costante positiva c, indipendente da u, tale che*

$$|u|_{2+\alpha,d;\Omega} \leq c\,(\sup_\Omega |u| + |d^2 f|_{\alpha,d;\Omega}).$$

§4. Il problema di Dirichlet.

Supponiamo che l'operatore L soddisfi le condizioni H_1, H_2 e

H$_3$) $a_{ij} \in C_{loc}^\alpha(R^{N+1})$, per ogni $i, j = 1, \dots, q$.

Qui ed in seguito α indica una costante positiva minore di β.

Vale il seguente risultato:

Teorema 4.1. *Siano $f \in C^\alpha(\Omega; B)$ e $\phi \in C(\partial\Omega)$. Allora esiste una soluzione generalizzata $u \in C_{loc}^{2+\alpha}(\Omega; B)$ del problema*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \phi. \end{cases} \tag{4.1}$$

Inoltre u assume il dato al bordo ϕ nei punti L-regolari di $\partial\Omega$ (Cfr. Definizione 6.10).

La prova del Teorema 4.1 è così organizzata:

1) Consideriamo dapprima il problema omogeneo

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \phi, & \phi \in C(\partial\Omega). \end{cases} \tag{4.2}$$

Forniamo una soluzione di (4.2) generalizzata con il metodo di Perron-Wiener.

2) Dimostriamo che se $\Gamma(z; \zeta)$ è la soluzione fondamentale dell'operatore L ottenuta in [P] con il metododi Levi della parametrice, allora

$$w(z) = -\int_\Omega \Gamma(z; \zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta$$

$w \in C_{loc}^{2+\alpha}(\Omega; B) \cap C(\bar{\Omega})$ e $Lw = f$.

Quindi se v è soluzione generalizzata del problema

$$\begin{cases} Lv = 0 & \text{in } \Omega \\ v|_{\partial\Omega} = -w + \phi \end{cases}$$

$u = v + w$ è soluzione di (4.1).

Il metodo di Perron-Wiener si inserisce nella teoria del potenziale in spazi armonici astratti. Illustreremo le nozioni fondamentali di questa teoria nel paragrafo 6.

Sia X un sottoinsieme aperto e limitato di R^{N+1} e

$$\mathcal{H}^L = \{u \in C_{loc}^{2+\alpha}(X) \quad / \quad Lu = 0 \quad \text{in } X\}.$$

Allora, vale il seguente teorema:

Teorema 4.2. *$(X, \mathcal{H}^L)$ è uno spazio β-armonico (Cfr. Definizione 6.8).*

Punto cruciale della dimostrazione del Teorema 4.2 è provare l'assioma di separabilità (Cfr. Definizione 6.5), cioè fornire una classe particolare di aperti per la quale il problema di Dirichlet (4.2) è univocamente risolubile.

Definizione 4.3. *Sia Ω un sottoinsieme aperto limitato di R^{N+1}. Diremo che Ω è fortemente regolare per L se per ogni $z \in \partial\Omega$ esiste $\nu \in R^{N+1}$ tale che*

$$B_{eucl}(z+\nu, |\nu|) \subset R^{N+1} \setminus \Omega \quad e \quad \langle A(z)\nu, \nu\rangle > 0,$$

dove $\langle\ ,\ \rangle$ indica il prodotto interno in R^{N+1} e $A(z)$ è la matrice $(N+1)\times(N+1)$

$$A(z) = \begin{pmatrix} A_0(z) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0(z) = (a_{ij}(z)), \quad i,j = 1,\dots q.$$

Sussiste il seguente:

Teorema 4.4. *Siano Ω un aperto fortemente L-regolare ed $f \in C_d^\alpha(\Omega; B)$. Allora esiste ed è unica $u \in C_d^{2+\alpha}(\Omega; B) \cap C(\bar{\Omega})$ tale che*

$$\begin{cases} Lu = f & in \quad \Omega \\ u = 0 & su \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Cenno della dimostrazione. La prova si basa su un principio di massimo debole e sul metodo di continuità che sfrutta le stime di Schauder del paragrafo 3.

Fissato $z_0 \in \Omega$, consideriamo L_0 l'operatore congelato in z_0 e definiamo

$$L_\lambda \equiv \lambda L + (1-\lambda)L_0, \quad \lambda \in [0,1].$$

Indichiamo con $(P_{\lambda,f})$ il problema di Dirichlet

$$(P_{\lambda,f}) \qquad \begin{cases} L_\lambda u = f & \text{in} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{su} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

e introduciamo l'insieme

$$\Lambda = \{\lambda \in [0,1] \ / \ \text{il problema } (P_{\lambda,f}) \text{ ha una soluzione} \\ u \in C_d^{2+\alpha}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \quad \text{per ogni } f \in C_d^\alpha(\Omega)\ \}.$$

Proviamo che Λ è un sottoinsieme non vuoto di $[0,1]$, aperto e chiuso allora $\Lambda = [0,1]$ e in particolare $1 \in \Lambda$.

1) $0 \in \Lambda$. Per provarlo abbiamo utilizzato un teorema di Bony in [B].

2) Λ è un sottoinsieme aperto di $[0,1]$.

Fissato $\lambda_0 \in \Lambda$, abbiamo introdotto l'operatore A

$$A : C_d^{2+\alpha}(\Omega; B) \cap C(\bar{\Omega}) \to C_d^{2+\alpha}(\Omega; B) \cap C(\bar{\Omega})$$

$Au = v$, per ogni $u \in C_d^{2+\alpha}(\Omega; B) \cap C(\bar{\Omega})$ essendo v soluzione del problema $(P_{\lambda_0,F})$ dove

$$F(u) \equiv (L_{\lambda_0} - L_\lambda)u + f.$$

Inoltre abbiamo costruito un sottoinsieme chiuso X_λ di $C_d^{2+\alpha}(\Omega; B) \cap C(\bar{\Omega})$ tale che, se c è una opportuna costante positiva e $|\lambda - \lambda_0| \leq c$, allora $A(X_\lambda) \subseteq X_\lambda$ ed A è una contrazione.

Quindi, per il teorema del punto fisso, esiste ed è unica $u \in X_\lambda$ tale che $Au = u$. In altre parole, u è soluzione del problema

$$(P_{\lambda,f}) \qquad \begin{cases} L_\lambda u = f & \text{in} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{su} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

quindi $]\lambda_0 - c, \lambda_0 + c[\subset \Lambda$.

3) Λ è un sottoinsieme chiuso di $[0,1]$. Utilizziamo l'ipotesi sull'insieme Ω. Sia $\lambda_n \to \sigma$, per $n \to \infty$, $(\lambda_n)_n \subset \Lambda$. Sia inoltre $(u_n)_n$ la successione delle corrispondenti soluzioni del problema $(P_{\lambda_n,f})$. Si dimostra che $u_n \to u \in C_d^{2+\alpha}(\Omega; B)$ e $L_\sigma u = f$.

Per concludere la prova rimane da dimostrare che $u = 0$ su $\partial\Omega$. Fissiamo $\bar{z} \in \partial\Omega$. Per ipotesi esiste una normale esterna ν in $\bar{z}$ tale che $\langle A(\bar{z})\nu, \nu\rangle > 0$. Sia

$$w_{\bar{z}}(z) = \exp(-Mr^2) - \exp(-M|z - \bar{z} - r\nu|^2)$$

essendo $\overline{B_{eucl}(\bar{z} + r\nu, r)} \cap \Omega = \emptyset$.

Allora, se M è sufficientemente grande, $w_{\bar{z}}$ è una barriera in $\bar{z}$ per ogni $\lambda \in [0,1]$, cioè esiste un intorno V di $\bar{z}$ tale che per ogni $\lambda \in [0,1]$:

$$w_{\bar{z}}(z) > 0 \text{ in } \overline{\Omega \cap V} \setminus \{\bar{z}\} \text{ e } \quad L_\lambda w_{\bar{z}}(z) \leq -1 \quad \forall z \in \Omega \cap V.$$

Dal principio del massimo debole si deduce che

$$|u(z)| \leq \sup_{\Omega \cap V} |f| \; w_{\bar{z}}(z) \to 0, \quad \text{e } z \to \bar{z} \quad \text{se} \quad z \in \Omega \cap V,$$

e quindi $\sigma \in \Lambda$.

§5. Regolarità dei punti di frontiera.

Sia Ω un aperto limitato di R^{N+1}, consideriamo il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{in} \quad \Omega \\ u = \phi & \text{su} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

e indichiamo con H_ϕ^Ω la sua soluzione generalizzata nel senso di Perron-Wiener.

Ricordiamo che un punto $z_0 \in \partial\Omega$ di dice L-regolare se

$$\lim_{z \to z_0} H_\phi^\Omega(z) = \phi(z_0) \quad \text{per ogni} \quad \phi \in C(\partial\Omega).$$

Il problema della caratterizzazione geometrica dei punti di frontiera è ancora largamente aperto. Abbiamo provato un criterio geometrico di L-regolarità che estende al nostro contesto il criterio del cono esterno di Zaremba.

Definizione 5.1. (*L*-cono). *Chiameremo L-cono di vertice* $(0,0)$, *base* K *e altezza* T *l'insieme:*

$$C = \{D(r)\,(x, -T) \mid x \in K,\ 0 \le r \le 1\}$$

ove $T > 0$ *e* K *è un sottoinsieme chiuso di* R^N *avente misura* N*-dimensionale finita e positiva.*

Se $z_0 \in R^{N+1}$ *allora definiamo L-cono di vertice* z_0 *l'insieme*

$$C_{z_0} = \{z_0 \circ z \mid z \in C\}.$$

Abbiamo utilizzato un risultato di Negrini e Scornazzani in [NS] per provare il seguente:

Teorema 5.2. *Siano* Ω *un aperto limitato di* R^{N+1} *e* $z_0 \in \partial\Omega$. *Se esiste un L-cono di vertice* z_0 *tale che* $C_{z_0} \subset R^{N+1} \setminus \Omega$, *allora* z_0 *è L-regolare.*

Sia Ω un aperto di R^{N+1}. Se in tutti i punti della frontiera di Ω esiste una normale esterna ad Ω allora è possibile suddividere $\partial\Omega$ in opportuni sottoinsiemi individuati dalla cosidetta funzione di Fichera, relativa all'operatore L.

Supponiamo allora che per ogni $z \in \partial\Omega$ esista $\nu(z) = (\nu_1(z), \dots, \nu_{N+1}(z))$ una normale esterna in z ad Ω, e definiamo

$$\Sigma^0 = \left\{ z \in \partial\Omega \mid \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(z)\nu_i(z)\nu_j(z) = 0 \right\}.$$

Se $z \in \Sigma^0$ poniamo inoltre:

$$f(z) = \sum_{k=q+1}^{N} \sum_{i=1}^{N} x_i b_{ik}\, \nu_k(z) - \nu_{N+1}(z) = \langle x, B\nu(z)\rangle - \nu_{N+1}(z).$$

f è detta la funzione di Fichera per l'operatore L relativamente ad Ω.

Definiamo infine:

$$\Sigma_0 = \{z \in \Sigma^0 \mid f(z) = 0\}, \quad \Sigma_1 = \{z \in \Sigma^0 \mid f(z) < 0\},$$
$$\Sigma_2 = \{z \in \Sigma^0 \mid f(z) > 0\}, \quad \Sigma_3 = \partial\Omega \setminus \Sigma^0.$$

Σ_3 è la parte non caratteristica della frontiera di Ω.

Proposizione 5.3. *I punti di* Σ_3 *sono regolari per l'operatore* L.

Vogliamo ora dimostrare ora un criterio geometrico per la L-regolarità dei punti di Σ_2. Premettiamo una definizione.

Se $z \in R^{N+1}$, scriviamo $z = (z', z'') \in R^q \times R^{N+1-q}$ e definiamo

$$d_\epsilon(z) = \frac{|z'|}{\epsilon} + \frac{|z''|}{\epsilon^2}, \quad \epsilon > 0$$

dove $|\ |$ indica la norma euclidea in R^q oppure in R^{N+1-q}.

Poniamo poi per ogni $\epsilon > 0$:

$$E(\zeta_0, \epsilon) = \{z \in R^{N+1} \mid d_\epsilon(\zeta_0 - z) \le 1\}.$$

Proposizione 5.4. *Sia $z_0 \in \Sigma_2$. Supponiamo che esistano $\zeta_0 \in R^{N+1} \setminus \bar{\Omega}$ ed $\epsilon > 0$ tali che $E(\zeta_0, \epsilon) \subset R^{N+1} \setminus \Omega$, allora z_0 è un punto L-regolare.*

Esempio: l'operatore di Kolmogorov
Consideriamo in R^3 l'operatore

$$L = \partial_x^2 + x\,\partial_y - \partial_t, \quad (x, y, t) \in R^3.$$

Allora secondo le notazioni del paragrafo 2

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e quindi la dilatazione associata è $D(\lambda) = (\lambda, \lambda^3, \lambda^2)$, $\lambda > 0$.
Sia Ω il cubo centrato nell'origine e di lato 2.
Allora

$$\Sigma_1 = (\{t = 1\} \cup \{y = 1 \quad \text{e} \quad x < 0\} \cup \{y = -1 \quad \text{e} \quad x > 0\}) \cap \partial\Omega,$$

$$\Sigma_2 = (\{t = -1\} \cup \{y = 1 \quad \text{e} \quad x > 0\} \cup \{y = -1 \quad \text{e} \quad x < 0\}) \cap \partial\Omega,$$

e

$$\Sigma_3 = (\{x = 1\} \cup \{x = -1\}) \cap \partial\Omega.$$

I punti di Σ_2 e Σ_3 sono regolari per L.
Invece l'insieme

$$A = \{(0, 1, t),\ (0, -1, t) \quad |t| \leq 1\} \cap \partial\Omega.$$

è costituito da punti regolari, poichè in quest'ultimi è verificata la condizione di L-cono esterno.

Infatti se $z_0 = (0, 1, t_0)$, $|t_0| \leq 1$ e K è un compatto di R^2 allora l'L-cono di vertice z_0, secondo la Definizione 5.1, di base K è

$$C_{z_0} = \{(rx, r^3 y + 1, -r^2 T + t_0) \mid (x, y) \in K,\ 0 \leq r \leq 1\}$$

dove $T > 0$. Se scegliamo $K \subset \{(x, y) \in R^2 \mid y > 1\}$ allora si verifica facilmente che C_{z_0} è un L-cono di vertice z_0 esterno ad Ω.

§6. Spazi armonici astratti.

In questo paragrafo presenteremo alcune nozioni di teoria del potenziale negli spazi armonici astratti, traendo spunto dalla monografia di Constantinescu e Cornea, [CC].

Indichiamo con (X, τ) uno spazio topologico localmente compatto verificante l'assioma di numerabilità e di separazione.

Definizione 6.1. (Fascio armonico su X).
Una funzione

$$\mathcal{H} : \tau \to \cup_{v \in \tau} \bar{R}^V$$

è un fascio armonico se
i) $\mathcal{H}(V)$ *è un sottospazio vettoriale di* $C(V, R)$ *per ogni* $V \in \tau$;
ii) Se $V_1, V_2 \in \tau$, $V_1 \subseteq V_2$, $u \in \mathcal{H}(V_2)$, *allora* $u|_{V_2} \in \mathcal{H}(V_1)$;
iii) Se $V_i \in \tau$, $\forall i \in I$ *e*

$$u : \cup_{i \in I} V_i \to \bar{R}, \quad u|_{V_i} \in \mathcal{H}(V_i)$$

allora $u \in \mathcal{H}(\cup_{i \in I} V_i)$.

Sia $\mathcal{H}$ un fascio armonico su X.

Definizione 6.2. (Aperto $\mathcal{H}$- regolare).
Un aperto $V \in \tau$ *si dice* $\mathcal{H}$*-regolare se*
i) $\bar{V}$ *è compatto e il bordo di* V *è non vuoto;*
ii) Per ogni $\phi \in C(\partial V)$ *esiste ed è unica* $H_\phi^V \in \mathcal{H}(V)$ *tale che*

$$H_\phi^V(z) \to \phi(\zeta) \quad z \to \zeta \quad \text{per ogni} \quad \zeta \in \partial V;$$

iii) Se $\phi \geq 0$ *allora* $H_\phi^V \geq 0$.

Osservazione 6.3
Se V è un aperto regolare e $z \in X$, l'applicazione

$$C(\partial V) \ni \phi \to H_\phi^V(z) \in R$$

è lineare e positiva. Allora esiste una misura di Borel regolare che indicheremo con μ_z^V, detta misura armonica relativa a V ed a z, tale che

$$H_\phi^V(z) = \int_{\partial V} \phi(\zeta)\, d\mu_z^V(\zeta) \quad \forall z \in X.$$

Definizione 6.4. (Funzioni $\mathcal{H}$-iperarmoniche).
Sia Ω *un aperto di* (X, τ). *Diremo che*

$$u : \Omega \to]-\infty, +\infty]$$

è $\mathcal{H}$*-iperarmonica se*
i) u *è semicontinua inferiormente;*
ii) Per ogni aperto $\mathcal{H}$*-regolare* V, $\bar{V} \subseteq \Omega$ *si ha*

$$u(z) \geq \int_{\partial V} u(\zeta)\, d\mu_z^V(\zeta).$$

Indicheremo con $\mathcal{H}^*(\Omega)$ *l'insieme dellle funzioni* $\mathcal{H}$*-iperarmoniche in* Ω.

Definizione 6.5. (Spazio armonico).
Sia $\mathcal{H}$ un fascio armonico su X. Diremo che $(X, \mathcal{H})$ è uno spazio armonico se soddisfa i seguenti assiomi:

(a) *Assioma di positività.*
Per ogni $z \in X$ esistono un intorno aperto V di z e $u \in \mathcal{H}(V)$ tale che $u(z) > 0$;

(b) *Assioma di convergenza di Bauer.*
Se Ω è un aperto di X e $(u_n)_n$ è una successione in $\mathcal{H}(\Omega)$ monotona crescente e $u = \sup_n u_n$ è localmente limitata, allora $u \in \mathcal{H}(\Omega)$;

(c) *Assioma di risolubilità.*
Esiste una base di aperti $\mathcal{H}$-regolari di X;

(d) *Assioma di separazione.*
Per ogni $z_1, z_2 \in X$, $z_1 \neq z_2$ esistono $u, v \in \mathcal{H}^*(X)$ tali che $u(z_1)v(z_2) \neq u(z_2)v(z_1)$. Inoltre : per ogni aperto relativamente compatto Ω in X e per ogni $z \in \Omega$ esiste $v \in \mathcal{H}^*(\Omega)$ tale che $v(z) < +\infty$ e $\inf_\Omega v > 0$.

Problema di Dirichlet generalizzato.
Sia $(X, \mathcal{H})$ uno spazio armonico e Ω un sottoinsieme aperto relativamente compatto di X. Sia poi ϕ una funzione continua in $\partial\Omega$.

Chiemeremo problema generalizzato di Dirichlet per $\mathcal{H}$ sull'aperto Ω con dato al bordo ϕ, il problema di determinare $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ tale che $\lim_{z \to \zeta} u(z) = \phi(\zeta)$ per ogni $\zeta \in \partial\Omega$ e scriveremo

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} u \in \mathcal{H}(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = \phi. \end{cases}$$

Introduciamo ora il concetto di soprasoluzione e di sottosoluzione per (D). Indicheremo con $\overline{U}_\phi^\Omega$ l'insieme delle soprafunzioni relative a ϕ ed a Ω dato da

$$\overline{U}_\phi^\Omega = \{u \in \mathcal{H}^*(\Omega) \quad / \quad \liminf_{\zeta \to z} u(\zeta) \geq \phi(z), \quad \forall z \in \partial\Omega\}.$$

Analogamente chiameremo insieme delle sottofunzioni relative a ϕ e ad Ω l'insieme

$$\underline{U}_\phi^\Omega = \{u \in -\mathcal{H}^*(\Omega) \quad / \quad \limsup_{\zeta \to z} u(\zeta) \leq \phi(z), \quad \forall z \in \partial\Omega\}.$$

Chiameremo poi soprasoluzione di (D) la funzione

$$\overline{H}_\phi^\Omega \equiv \inf \overline{U}_\phi^\Omega$$

e sottosoluzione di (D) la funzione

$$\underline{H}_\phi^\Omega \equiv \sup \underline{U}_\phi^\Omega.$$

Definizione 6.6. (Funzione risolutiva e soluzione generalizzata di (D)).
Diremo che $\phi : \partial\Omega \to R$ continua, è risolutiva se

$$\overline{H}_\phi^\Omega = \underline{H}_\phi^\Omega \quad e \quad \overline{H}_\phi^\Omega \in \mathcal{H}(\Omega).$$

In tal caso porremo

$$H_\phi^\Omega = \bar{H}_\phi^\Omega$$

e diremo che H_ϕ^Ω è la <u>*soluzione generalizzata*</u> *nel senso di Perron-Wiener del problema di Dirichlet (D).*

Se $(X, \mathcal{H})$ è uno spazio β-armonico, nel senso della seguente Definizione 6.8, allora ogni funzione continua ϕ è risolutiva.

Definizione 6.7. (Funzioni superarmoniche).
Diremo che $u \in \mathcal{H}^*(\Omega)$ è superarmonica se per ogni aperto regolare V, $\bar{V} \subset \Omega$ la funzione

$$V \ni z \to \int_{\partial V} u(\zeta)\, d\mu_z^V(\zeta) \in R$$

è armonica in V.
Indicheremo poi con $S(\Omega)$ l'insieme delle funzioni superarmoniche in Ω e con $S_c^+(\Omega)$ l'insieme delle funzioni superarmoniche positive e continue in Ω.

Definizione 6.8. (Spazio β-armonico).
Diremo che uno spazio armonico $(X, \mathcal{H})$ è β-armonico se $S_c^+(\Omega)$ separa i punti di X.

Sussiste il seguente:

Teorema 6.9.
In uno spazio β-armonico ogni funzione ϕ continua è risolutiva.

Definizione 6.10. (Punti $\mathcal{H}$-regolari della frontiera). *Un punto $z \in \partial\Omega$ si dice $\mathcal{H}$-regolare se*

$$\lim_{z \to \zeta} H_\phi^\Omega(z) = \phi(\zeta)$$

per ogni $\phi \in C(\partial\Omega)$.

Definizione 6.11.
Sia $z \in \partial\Omega$, diremo che w è una barriera in z per Ω se esiste un intorno V di z e $w \in \mathcal{H}^*(\Omega \cap V)$ tali che

$$w > 0 \quad in \ \Omega \cap V \quad e \quad w(\zeta) \to 0 \quad per \ \zeta \to z.$$

Teorema 6.12. (Bouligand).
Sia $(X, \mathcal{H})$ uno spazio β-armonico. Condizione necessaria e sufficiente affinchè $z \in \partial\Omega$ sia regolare è che esista una barriera per Ω in z.

§7. Summary.

We consider in R^{N+1} the following class of operators:

$$L = \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(z)\partial_{x_i,x_j} + \langle x, BD\rangle - \partial_t, \quad D = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_N}),$$

where $z = (x,t) \in R^{N+1}$, $1 \le q \le N$, B is a constant $N \times N$ matrix and $\langle\, , \rangle$ denotes the inner product in R^N.

We suppose that:

H_1) $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(R^{N+1})$ for $i,j = 1, \dots, q$ and $A(z) = (a_{ji}(z))_{i,j=1,\dots,q}$ is a $q \times q$ matrix such that for every $z \in R^{N+1}$

$$\frac{1}{c} I_q \le A(z) \le c I_q,$$

($c > 0$ and I_q denotes the $q \times q$ identity matrix).

H_2) B is a constant matrix of the type:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

where for every $i = 1, \dots, r$, B_i is a $p_{i-1} \times p_i$ matrix with maximum rank p_i and $q = p_0 \ge p_1 \ge \dots \ge p_r$.

As remarked in 2.1 we can define a group $(R^{N+1}, \circ)$ and a family of dilations $(D(\lambda))_{\lambda>0}$ on R^{N+1} such that for every $z_0 \in R^{N+1}$ the *frozen* operator

$$L_{z_0} = \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(z_0)\partial_{x_i,x_j} + \langle x, BD\rangle - \partial_t,$$

is invariant respect to the left translations relative to $\circ$. On the other hand, L_{z_0} commutes with the dilations $(D(\lambda))_{\lambda>0}$ in the following sense $L_{z_0} \circ D(\lambda) = \lambda^2 D(\lambda) \circ L_{z_0}$.

Moreover, we can introduce a homogeneous space (in the sense of Coifman and Weiss) (R^{N+1}, d, μ), where d is a $D(\lambda)$- homogeneous distance and μ is a Lebesgue measure on R^{N+1}.

We consider the relative spaces of hölderian functions (see Definition 3.1 and 3.3). Moreover, we prove estimates of Schauder type, see Theorem 3.4, under the additional hypothesis:

H_3) $a_{ij} \in C^{\alpha}_{loc}(R^{N+1})$ for $i, j = 1, \dots, q$.

In Theorem 4.1, we prove the esistence of a *generalized* solution, in the sense of Section 6, of the Dirichlet problem

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in} \quad \Omega \\ u = \phi & \text{su} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{7.1}$$

where Ω is a bounded open subset of R^{N+1}, f is a hölderian function and ϕ is a continuous function on $\partial\Omega$. Moreover $u(z) \to \phi(z_0)$ as $z \to z_0 \in \partial\Omega$, if z_0 is a L-regular point of $\partial\Omega$.

For this goal, the main step is to built a class of open subsets of R^{N+1} for which the problem (7.1) is solvable (see Theorem 4.4).

In the section 5, we show a geometric criterion for the regularity of the points of $\partial\Omega$, which extends to our case the classical Zaremba criterion of exterior cone.

BIBLIOGRAFIA

[B] J.M. Bony, *Principe de maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés*, Ann. Inst. Fourier. Grenoble **19** (1969), 277-304.

[CC] C. Constantinescu, A. Cornea, *Potential theory on harmonic spaces*, Berlin, Springer-Verlag (1972).

[FR] E.B. Fabes, N.M. Riviére, *Singular integrals with mixed homogeneity*, Studia Math. **27** (1966), 19-38.

[LP] E. Lanconelli, S. Polidoro, *On a class of hypoelliptic evolution operators*, Rend. Sem. Mat. Pol. Torino **51.4** (1993), 137-171.

[M] M. Manfredini, *Stime a priori e problema al contorno per una classe di operatori ultraparabolici*, Tesi di Dottorato di Ricerca, Università di Bologna.

[P] S. Polidoro, *On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov-Fokker-Planck type*, Le Matematiche **44** (1994), 1-53.

[NS] P.Negrini, V. Scornazzani, *Superarmonic functions and regolarity of boundary points for a class of elliptic-parabolic partial differential operators*, Bollettino U.M.I. Analisi Funzionale e Applicazioni **Serie VI, vol. III** (1984), 85-107.

[S] E.M. Stein, *Harmonic analysis: real-variable methods, ortogonality and oscillatory integrals*, Princeton University Press (1993).